OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1912. N° 3.

SUR LA SOMME DES COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE DE TAYLOR.

PAR

C. HANSEN.

L'objet de cette étude est de chercher une limite supérieure pour la somme des coefficients d'une série de Taylor. Soit $f(s)$ une fonction analytique, qui admette le développement

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n,$$

lorsque $|s| < 1$. Pour le coefficient c_n du terme général on aura l'expression classique

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(s)}{s^{n+1}}\, ds,$$

où le chemin d'intégration sera par exemple une circonférence ayant l'origine pour centre et dont le rayon ρ sera inférieur à l'unité. Posons $s = \rho e^{i\theta}$ et désignons par M_ρ le module maximum de $f(s)$ pour $|s| = \rho$, on a alors

$$|c_n| < \frac{1}{\rho^n} M_\rho \tag{1}$$

et, par suite,

$$|c_0 + \cdots + c_n| < \frac{\frac{1}{\rho^n} - \rho}{1-\rho} M_\rho\,. \tag{2}$$

Cette limite supérieure est ordinairement sans valeur, parce qu'elle est trop grande. Choisissons comme quantité ρ une fonction de n telle que la limite de $\frac{1}{\rho^n}$ pour $n = \infty$ ait une valeur finie et déterminée. Posons par exemple $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, ce qui donne $\text{Lim}\,\frac{1}{\rho^n} = e$; le second membre de l'expression

(2) sera n fois plus grand que celui de l'expression (1). Les fonctions les plus élémentaires montrent que les limites (1) et (2) sont trop grandes; ordinairement la limite supérieure (1) se trouvera être si grande, qu'elle représentera en même temps une limite supérieure de la somme $|c_0 + \cdots + c_n|$. Prenons par exemple la fonction

$$f(s) = l\,\frac{1}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n},$$

on a alors $M_\rho = |l(1-\rho)|$, et, si l'on pose $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, on aura, en vertu de l'inégalité (1)

$$c_n < \frac{n}{n-1}\, e\, l n,$$

mais il est bien connu que cette limite supérieure sera également une limite de la somme $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

La note présente comprend deux chapitres. Dans le premier, nous allons établir, pour une classe étendue de fonctions analytiques, une limite supérieure pour le module de la somme des coefficients en question, limite qui sera beaucoup plus exacte que la limite (2); nous arriverons au résultat,

$$|c_0 + \cdots + c_n| < k\,\frac{1}{\rho^n}\, M_\rho,$$

où k désigne une quantité finie, inférieure à 3,84. Le second chapitre contient des applications du théorème établi à quelques fonctions, pour lesquelles on connaît l'ordre de grandeur de la somme $c_0 + \cdots + c_n$ par rapport à n et qui montrent ainsi la précision du théorème.

Chapitre I.

La somme des $n+1$ premiers coefficients d'une série de Taylor.

§ 1. Soit $f(s)$ une fonction analytique de la variable complexe s, qui admet le développement

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \tag{1}$$

pour des valeurs de s dont les modules restent inférieurs à l'unité. Posons pour abréger

$$\sum_{p=0}^{p=n} c_p = C_n,$$

on a alors

$$\frac{f(s)}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n, \quad |s|<1.$$

Remplaçons s par $\rho e^{i\theta}$ et désignons la partie réelle de $f(\rho e^{i\theta})$ par $A(\rho, \theta)$ ou par A, la partie imaginaire par $B(\rho, \theta)$ ou par B, posons en outre $C_n = \alpha_n + i\beta_n$, où α et β sont réels, on a alors

$$\frac{A+iB}{1-\rho\cos\theta - i\rho\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(\alpha_n + i\beta_n)(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

d'où l'on tire les deux équations

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) = \frac{A(1-\rho\cos\theta) - B\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta) = \frac{B(1-\rho\cos\theta) + A\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}.$$

Ces deux équations montrent qu'on a

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} \frac{B(1-\rho\cos\theta) + A\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} \sin n\theta\, d\theta, \quad n \geqq 1 \quad (2)$$

et

$$\beta_n = \frac{-1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} \frac{A(1-\rho\cos\theta) - B\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} \sin n\theta\, d\theta, \quad n \geqq 1. \quad (3)$$

Dans ces formules la quantité ρ a une valeur positive quelconque plus petite que l'unité.

En posant $c_n = a_n + i b_n$, où a_n et b_n sont réels, on tire de l'équation (1)

$$A(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta)$$

et

$$B(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta),$$

d'où il suit que

$$\left.\begin{aligned} A(\rho,\theta) + A(\rho,-\theta) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n a_n \cos n\theta = 2A_1; \\ A(\rho,\theta) - A(\rho,-\theta) &= -2\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n b_n \sin n\theta = 2A_2. \\ B(\rho,\theta) + B(\rho,-\theta) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n b_n \cos n\theta = 2B_1; \\ B(\rho,\theta) - B(\rho,-\theta) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n a_n \sin n\theta = 2B_2. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Transformons les intégrales (2) et (3) en deux autres entre les limites 0 et π en remplaçant θ par $2\pi - \theta$, ce qui donne

$$a_n = \frac{2}{\pi\rho^n}\int_0^{\pi} \frac{B_2 \cdot (1 - \rho\cos\theta) + A_1 \rho \sin\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} \sin n\theta \, d\theta \qquad (5)$$

et

$$\beta^n = -\frac{2}{\pi\rho^n}\int_0^{\pi} \frac{A_2 \cdot (1 - \rho\cos\theta) - B_1 \rho \sin\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} \sin n\theta \, d\theta. \quad (6)$$

§ 2. Il s'agit maintenant de comparer le module du coefficient $C_n = a_n + i\beta_n$ au module maximum de la fonction $f(s)$ sur le cercle $|s| = \rho$. Considérons d'abord l'intégrale (5) que nous partagerons en deux autres de la manière suivante

$$a_n = I_1 + I_2 \qquad (7)$$

où

$$I_1 = \frac{2}{\pi\rho^n}\int_0^{\pi}\frac{B_2\cdot(1-\rho\cos\theta)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\sin n\theta\, d\theta$$

et

$$I_2 = \frac{2}{\pi\rho^{n-1}}\int_0^{\pi}\frac{A_1\sin\theta\sin n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\,d\theta.$$

On obtient tout de suite une limite supérieure pour $|I_1|$ en observant que

$$|I_1| < \frac{2}{\pi\rho^n}M(B_2)_\rho\int_0^{\pi}\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\rho+\rho^2}\,d\theta,$$

$M(B_2)_\rho$ désignant le maximum du module de B_2 sur le cercle $|s| = \rho$.

Or

$$\int_0^{\pi}\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \pi,$$

de sorte qu'on a

$$|I_1| < \frac{2}{\rho^n}M(B_2)_\rho. \tag{8}$$

Pour obtenir une limite supérieure pour $|I_2|$ nous allons partager cette intégrale en deux autres I_3 et I_4 de telle sorte que

$$I_3 = \frac{2}{\pi\rho^{n-1}}\int_0^{\theta_1}\frac{A_1\sin\theta\sin n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\,d\theta$$

et

$$I_4 = \frac{2}{\pi\rho^{n-1}}\int_{\theta_1}^{\pi}\frac{A_1\sin\theta\sin n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\,d\theta,$$

où θ_1 est déterminé par l'équation

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\,,\ 0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\,.$$

Quant à l'intégrale I_3, on a

$$|I_3| < \frac{2}{\pi\rho^{n-1}}M(A_1)_\rho\int_0^{\theta_1}\frac{\sin\theta\, d\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2},$$

où $M(A_1)_\rho$ désigne le module maximum de A_1 pour $|s| = \rho$.

Or

$$\int_0^{\theta_1}\frac{\sin\theta\, d\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} = \frac{1}{2\rho}\left[l\left((1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\theta_1} = \frac{l\,2}{2\rho}$$

et, par suite,

$$|I_3| < \frac{l2}{\pi\rho^n} M(A_1)_\rho . \tag{9}$$

Considérons alors l'intégrale I_4. La fraction

$$\frac{\sin\theta\sin n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

qui figure sous le signe $\int$ prend pour $\rho = 1$ la valeur $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}\sin n\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$, ce qui nous conduit à comparer l'intégrale I_4 à la suivante

$$I_5 = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\int_{\theta_1}^{\pi}\frac{A_1\cos\frac{\theta}{2}\sin n\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\,d\theta .$$

Examinons la différence $I_4 - I_5$. On a

$$I_4 - I_5 = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\int_{\theta_1}^{\pi} A_1\cos\frac{\theta}{2}\sin n\theta\,\frac{4(1-\rho)\sin^2\frac{\theta}{2}-(1-\rho)^2}{\sin\frac{\theta}{2}\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}\,d\theta ;$$

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}} .$$

La fraction

$$\frac{4(1-\rho)\sin^2\frac{\theta}{2}-(1-\rho)^2}{\sin\frac{\theta}{2}\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}$$

change de signe, quand $\sin\frac{\theta}{2}$ dépasse la valeur $\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho}$, c'est pourquoi nous partagerons l'intégrale en deux autres I_6 et I_7, telles que

$$I_6 = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} A_1\cos\frac{\theta}{2}\sin n\theta\,\frac{(1-\rho)^2-4(1-\rho)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}\,d\theta ,$$

$$I_7 = \int_{\theta_2}^{\pi} A_1\cos\frac{\theta}{2}\sin n\theta\,\frac{4(1-\rho)\sin^2\frac{\theta}{2}-(1-\rho)^2}{\sin\frac{\theta}{2}\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}\,d\theta ,$$

où θ_2 est déterminé par l'équation

$$\sin\frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho} ,\quad 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} .$$

Quant à l'intégrale I_6 on a

$$|I_6| < M(A_1)_\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2-4(1-\rho)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}\,d\theta$$

Or

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\frac{\theta}{2} \frac{(1-\rho)^2 - 4(1-\rho)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\left[(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]} d\theta = \left[2l\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\rho} l\left[(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$= (\frac{1}{\rho} - 1)l(1-\rho) + \frac{l2}{\rho} + l\rho$$

et, par suite,

$$|I_6| < \left[(\frac{1}{\rho} - 1)l(1-\rho) + \frac{l2}{\rho} + l\rho\right] M(A_1)_\rho \tag{10}$$

De la même manière on aura

$$|I_7| < M(A_1)_\rho \left[-2l\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\rho} l\left[(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right]_{\theta_2}^{\pi}$$

c'est à dire que

$$|I_7| < \left[\frac{2}{\rho} l(1+\rho) - 2l2 - (\frac{1}{\rho} - 1)l(1-\rho)\right] M(A_1)_\rho \tag{11}$$

On a donc

$$|I_6| + |I_7| < \left[\frac{2}{\rho} l(1+\rho) - 2l2 + \frac{l2}{\rho} + l\rho\right] M(A_1)_\rho\ , \tag{12}$$

ce qui entraine, par rapport à l'intégrale I_4,

$$|I_4| < \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\left[\frac{2}{\rho} l(1+\rho) - 2l2 + \frac{l2}{\rho} + l\rho\right] M(A_1)_\rho + |I_5| \tag{13}$$

En substituant les limites supérieures (8), (9) et (13) dans l'équation (7) on a

$$|\alpha_n| < \frac{2}{\rho^n} M(B_2)_\rho + \frac{1}{\pi\rho^n}\left[2l2 + 2l(1+\rho) - 2\rho l2 + \rho l\rho\right] M(A_1)_\rho + |I_5|, \tag{14}$$

où $$I_5 = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}} \int_{\theta_1}^{\pi} A_1 \frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin n\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta,\ \sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}$$

Pour $|\beta_n|$ on aura une limite supérieure analogue en remplaçant B_2 par A_2 et A_1 par B_1.

§ 3. Il nous reste à étudier l'intégrale I_5. Cette intégrale offre des difficultés essentielles. Pour toutes les autres intégrales, que nous avons considérées, nous avons obtenu des limites supérieures de la forme

$$\frac{c}{\rho^n} M_\rho,$$

où c est une constante et M_ρ désigne le module maximum de $f(s)$ pour $|s| = \rho$. Mais à moins de faire une hypothèse relative à la fonction $f(s)$ on n'aura pas un résultat analogue pour l'intégrale I_5. On voit aisément que

$$|I_5| < \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} M(A_1)_\rho \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{2}{\pi \rho^{n-1}} M(A_1)_\rho \cdot l \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho},$$

et si l'on pose $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, on obtient

$$|I_5| < \frac{2 l 2 n}{\pi \rho^{n-1}} M(A_1)_\rho,$$

d'où résulte, en tenant compte des résultats déja obtenus, une limite supérieure de la forme

$$|a_n| < c \cdot \frac{ln}{\rho^n} M_\rho$$

valable pour une série de Taylor quelconque; mais cette limite supérieure est trop grande pour être utilisée dans la théorie des nombres. Il faut se débarrasser du facteur ln, qui se trouve au second membre de l'inégalité. Or pour faire cela il faut faire une hypothése relative à la fonction $f(s)$.

Tout d'abord nous allons fixer ρ en posant

$$\rho = 1 - \frac{1}{n} \text{ et par suite } \sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{2n\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Sur la fonction A_1, qui est une fonction de ρ et de θ, nous allons supposer dans ce paragraphe, qu'elle reste positive et va toujours en décroissant, quand θ varie de θ_1 à π. On peut alors appliquer le second théorème de la moyenne, ce qui donne

$$I_5 = \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} A_1(\rho, \theta_1) \cdot \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}} \int_{\theta_1}^{\xi} \sin n\theta \, d\theta, \; (\theta_1 < \xi < \pi)$$

et à fortiori

$$|I_5| < \frac{M(A_1)_\rho}{\pi \rho^{n-1}} \cdot 2n\sqrt{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{2}{n},$$

c'est à dire que
$$|I_5| < \frac{4}{\pi\rho^{n-1}} M(A_1)\rho.$$

L'inégalité (14) du paragraphe précédent conduit donc dans l'hypothèse admise pour A_1 à la limite suivante de $|\alpha_n|$
$$|\alpha_n| < \frac{2}{\rho^n} M(B_2)\rho + \frac{1}{\pi\rho^n}\Big[4\rho + 2l2 + 2l(1+\rho) - 2\rho\, l2 + \rho\, l\rho\Big] M(A_1)\rho,$$
$$\rho = 1 - \frac{1}{n}$$

En faisant la même hypothèse relativement à la fonction B_1 on aura, pour $|\beta_n|$, la limite supérieure
$$|\beta_n| < \frac{2}{\rho^n} M(A_2)\rho + \frac{1}{\pi\rho^n}\Big[4\rho + 2l2 + 2l(1+\rho) - 2\rho l2 + \rho l\rho\Big] M(B_1)\rho,$$
$$\rho = 1 - \frac{1}{n}.$$

§ 4. Pour arriver aux résultats précédents nous avons fait, sur les fonctions A_1 et B_1, une hypothèse qui a été essentielle et dont il faut se débarrasser à cause des applications que nous allons faire à la théorie des nombres. La plupart des fonctions qu'il nous faut considérer ne jouissent pas de la propriété d'avoir une partie réelle ou imaginaire allant toujors en décroissant ou en croissant quand θ varie de θ_1 à π; on trouvera au contraire des fonctions pour lesquelles le nombre de maxima et de minima sur le cercle $|s| = \rho$ croît à l'infini, quand on fait tendre ρ vers l'infini. Mais elles jouissent d'une autre propriété, beaucoup plus générale que celle qu'exprimait l'hypothèse du paragraphe précédent, et qui nous conduira au même résultat. L'hypothèse que nous admettons à présent est la suivante: Tous les coefficients du développement en série de Taylor de la fonction $f(s)$ sont réels et positifs. Quant à ρ nous posons $\rho = 1 - \frac{1}{kn}$, où k désigne un nombre positif au moins égal à l'unité.

Pour comparer la quantité α_n au module maximum de $f(s)$ nous considérons l'intégrale I_2:

$$I_2 = \frac{2}{\pi \rho^{n-1}} \int_0^{\pi} \frac{A_1 \sin \theta \sin n\theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} d\theta$$

et faisons la différence entre cette intégrale et l'intégrale

$$I_8 = \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} \int_0^{\pi} \frac{A_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin n\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Voici la différence:

$$I_2 - I_8 = \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} \int_0^{\pi} A_1 \sin n\theta \left[\frac{2 \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} - \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right] d\theta.$$

Nous partageons le chemin d'intégration en trois parties en posant

$$I_2 - I_8 = \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} I_9 + \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} I_{10} + \frac{1}{\pi \rho^{n-1}} I_7 \qquad (15)$$

où

$$I_9 = -\int_0^{\frac{\pi}{n}} A_1 \sin n\theta \left[\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{2 \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right] d\theta,$$

$$I_{10} = -\int_{\frac{\pi}{n}}^{\theta_2} A_1 \sin n\theta \left[\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{2 \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right] d\theta,$$

$$\sin \frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \rho}.$$

I_7 est l'intégrale designée par la même lettre au § 2.

Considérons d'abord l'intégrale I_9. Lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{n}$, le signe de $\sin n\theta$ est positif. La quantité

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{2 \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}$$

reste également positive, et l'on a par conséquent:

$$|I_9| < M(A_1)_\rho \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin n\theta \left[\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{2 \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right] d\theta.$$

Or $\sin n\theta < n \sin\theta$, d'où il suit que

$$|I_9| < nM(A_1)_\rho \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{2\sin^2\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\right) d\theta.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}$$

et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{2\sin^2\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\, d\theta = \frac{1}{\rho}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1+\rho^2}{2\rho^2}\cdot\frac{\pi}{n} - \frac{1-\rho^2}{\rho^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right),$$

ce qui donne

$$|I_9| < nM(A_1)_\rho\left[\frac{1-\rho^2}{\rho^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1-\rho^2}{2\rho^2}\cdot\frac{\pi}{n} - \frac{1}{\rho}(1-\rho)\sin\frac{\pi}{n}\right].$$

En y posant $\rho = 1 - \frac{1}{kn}$ on a

$$|I_9| < \frac{1}{k} M(A_1)_\rho\left[\frac{1+\rho}{\rho^2}\operatorname{arctg}\left(kn(1+\rho)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1+\rho}{2\rho^2}\cdot\frac{\pi}{n} - \frac{1}{\rho}\sin\frac{\pi}{n}\right]. \quad (16)$$

Quant à l'intégrale I_{10} on a (voir § 2)

$$|I_{10}| < M(A_1)_\rho\left[l\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\rho}\,l\left[(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right]_{\frac{\pi}{n}}^{\theta_2}$$

En y posant $\sin\frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{2\sqrt{kn}}$ on aura

$$|I_{10}| < M(A_1)_\rho\left[l\frac{1}{4kn} - l\sin^2\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{\rho}\,l\frac{1}{kn} + \frac{1}{\rho}\,l\left(1-2\rho\cos\frac{\pi}{n}+\rho^2\right)\right].$$

Or

$$-l\sin^2\frac{\pi}{2n} < l\frac{4n^2}{\pi^2} - l\left(1-\frac{\pi^2}{12n^2}\right)$$

et

$$l\left(1-2\rho\cos\frac{\pi}{n}+\rho^2\right) < 2l\frac{1}{kn} + l(1+\rho k^2\pi^2),$$

et par suite

$$|I_{10}| < M(A_1)_\rho\left[\frac{1}{\rho}\,l(1+\rho k^2\pi^2) - \frac{ln}{kn-1} - \left(1+\frac{1}{\rho}\right)lk - 2l\pi - l\left(1-\frac{\pi^2}{12n^2}\right)\right]$$

ce qui peut s'écrire

$$|I_{10}| < M(A_1)_\rho \left[l\left(\rho + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) + \frac{1}{kn\rho}\, l\left(\frac{1}{k} + \rho k\pi^2\right) - \frac{ln}{kn-1} - l\left(1 - \frac{\pi^2}{12n^2}\right)\right]. \quad (17)$$

En posant $\rho = 1 - \frac{1}{kn}$ dans la limite supérieure pour $|I_7|$ (voir l'inégalité (11)) on aura

$$|I_7| < M(A_1)_\rho \left[\frac{2}{\rho}\, l(1+\rho) - 2l2 + \frac{lkn}{kn\rho}\right]$$

et à fortiori

$$|I_7| < M(A_1)_\rho \frac{2l2 + lkn}{kn\rho}. \quad (18)$$

En ajoutant les inégalités (16), (17) et (18) on a

$$|I_9 + I_{10} + I_7| < \left[\frac{1+\rho}{k\rho^2} \operatorname{arctg}\left(kn(1+\rho)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right) \right.$$
$$\left. + l\left(1 + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) + \frac{1}{kn\rho}\, l(1 + k^2\pi^2) - \frac{3\pi}{2k\rho n} + c\right] M(A_1)_\rho \quad (19)$$

où

$$c = -l\left(1 - \frac{\pi^2}{12n^2}\right) + \frac{2l2}{kn\rho} - \frac{1+\rho}{2\rho}\cdot\frac{\pi}{kn\rho} - \frac{1}{k\rho}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{3\pi}{2k\rho n}.$$

On voit aisément que la quantité c est négative quelle que soit la valeur de $k \geqq 1$, lorsque n est suffisamment grande; il suffit de supposer $n > 10k$, car

$$-l\left(1 - \frac{\pi^2}{12n^2}\right) + \frac{2l2}{kn\rho} + \frac{3\pi}{2kn\rho} < \frac{\pi^2}{12n^2} + \frac{\pi^4}{2\cdot 12^2 n^4} + \frac{6{,}1}{kn\rho}$$

et

$$\frac{1+\rho}{2\rho}\cdot\frac{\pi}{kn\rho} + \frac{1}{k\rho}\sin\frac{\pi}{n} > \frac{2\pi}{kn\rho} - \frac{\pi^3}{6k\rho n^3},$$

d'où il suit que

$$c < \frac{\pi^2}{12n^2} + \frac{\pi^3}{6k\rho n^3} + \frac{\pi^4}{2\cdot 12^2 n^4} + \frac{6{,}1}{kn\rho} - \frac{2\pi}{kn\rho}$$
$$< \frac{\pi^2}{12n^2} + \frac{\pi^3}{60\rho n^2} + \frac{\pi^4}{28800n^2} - \frac{0{,}18}{kn\rho}$$
$$< \frac{\pi^2}{12n^2}\left[1 + \frac{\pi}{5\rho} + \frac{1}{240}\right] - \frac{0{,}18}{kn\rho}$$
$$< \frac{\pi^2}{6n^2} - \frac{0{,}18}{kn\rho}$$
$$< \frac{10}{6n\cdot 10k} - \frac{0{,}18}{kn} < -\frac{0{,}01}{kn}.$$

On a en outre

$$kn(1+\rho)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} < kn\cdot\frac{2kn-1}{kn}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2n}}{1-\dfrac{\pi^2}{8n^2}} < \frac{\left(k-\dfrac{1}{2n}\right)\pi}{1-\dfrac{10}{80nk}} < k\pi.$$

En vertu de ces résultats nous pouvons conclure de l'inégalité (19) que

$$|I_9+I_{10}+I_7| < \left[\frac{1+\rho}{k\rho^2}\operatorname{arctg}k\pi + l\left(1+\frac{1}{k^2\pi^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{kn\rho}\,l(1+k^2\pi^2) - \frac{3\pi}{2k\rho n}\right] M(A_1)_\rho,$$

$$\rho = 1-\frac{1}{kn},\quad n \geqq 10\,k,$$

ce qui entraîne par rapport à l'intégrale I_2 (voir l'équation (15))

$$|I_2| < \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\left[\frac{2\operatorname{arctg}k\pi}{k\rho^2} + l\left(1+\frac{1}{k^2\pi^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{kn\rho}\,l(1+k^2\pi^2) - \frac{3\pi}{2k\rho n}\right] M(A_1)\rho + |I_8|, \tag{20}$$

où

$$I_8 = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\int_0^\pi \frac{A_1\cos\frac{1}{2}\theta\sin n\,\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\,d\,\theta.$$

§ 5. Il nous reste alors à étudier l'intégrale I_8 dans l'hypothèse, faite sur $f(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n s^n$, que tous les coefficients c_n sont réels et positifs. En admettant cette hypothèse on a $A_1 = A$ (voir l'équation (4)). L'intégrale I_8 peut s'écrire sous la forme

$$I_8 = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,(\rho\,,2\,\theta)\frac{2\cos\theta\sin 2\,n\,\theta}{\sin\theta}\,d\,\theta$$

$$= \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,(\rho\,,2\,\theta)\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\,d\,\theta + \frac{1}{\pi\rho^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,(\rho\,,2\,\theta)\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\,d\,\theta,$$

où

$$A\,(\rho, 2\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \rho^n a_n\cos 2\,n\,\theta.$$

Nous posons

$$I_8 = I_{11} + I_{12},$$

où

$$I_{11} = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \cos 2p\theta \sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta,$$

$$I_{12} = \frac{1}{\pi\rho^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \cos 2p\theta \sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} d\theta.$$

On trouve facilement les valeurs de ces deux intégrales. Prenons l'intégrale I_{11}.

$$I_{11} = \frac{1}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \sin(2n+2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \sin(2n-2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho^{n-1}} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi\rho^{n-1}} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta.$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p$$

et
$$\sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} \rho^p a_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-2p+1)\theta}{\sin\theta} d\theta - \sum_{p=n+1}^{\infty} \rho^p a_p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2p-2n-1)}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{p=0}^{p=n} \rho^p a_p - \frac{\pi}{2} \sum_{p=n+1}^{\infty} \rho^p a_p,$$

ce qui entraîne

$$I_{11} = \frac{1}{4\rho^{n-1}} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p + \frac{1}{4\rho^{n-1}} \sum_{p=0}^{p=n} \rho^p a_p - \frac{1}{4\rho^{n-1}} \sum_{p=n+1}^{\infty} \rho^p a_p = \frac{1}{2\rho^{n-1}} \sum_{p=0}^{p=n} \rho^p a_p$$

et, de même,
$$I_{12} = \frac{1}{2\rho^{n-1}} \sum_{p=0}^{p=n-1} \rho^p a_p.$$

On a donc

$$I_8 = \frac{1}{2\rho^{n-1}} \left(\sum_{p=0}^{p=n} \rho^p a_p + \sum_{p=0}^{p=n-1} \rho^p a_p \right),$$

et, puisque tous les coefficients a_p sont positifs, les deux sommes, qui figurent entre parenthèses, sont inférieures à la somme $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \rho^p a_p$, c'est-à-dire inférieures à $M(A)_\rho$, d'où il suit que

$$I_8 < \frac{1}{\rho^{n-1}} M(A)_\rho. \tag{21}$$

On a donc, en vertu de l'inégalité (20)

$$|I_2| < \frac{1}{\rho^{n-1}} \left[\frac{2 \operatorname{arctg} k\pi}{\pi k \rho^2} + \frac{1}{\pi} l \left(1 + \frac{1}{k^2\pi^2}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{kn\rho\pi} l(1 + k^2\pi^2) - \frac{3}{2k\rho n} + 1 \right] M(A)_\rho. \tag{22}$$

Maintenant nous sommes arrivés au résultat que nous nous étions proposé d'établir. En vertu des expressions (7), (8) et (22) on a

$$a_n < \frac{2}{\rho^n} M(B)_\rho + \frac{1}{\rho^{n-1}} \left[1 + \frac{2 \operatorname{arctg} k\pi}{\pi k \rho^2} + \frac{1}{\pi} l \left(1 + \frac{1}{k^2 \pi^2} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{kn\rho\pi} l(1 + k^2\pi^2) - \frac{3}{2k\rho n} \right] M(A)_\rho \qquad (23)$$

où A et B désignent la partie réelle et imaginaire de la fonction $f(s)$ sur le cercle $|s| = 1 - \frac{1}{kn}$, $n \geqq 10k$.

Si l'on pose $k = 1$ dans l'expression (23) on aura la limite supérieure

$$a_n < \frac{2}{\rho^n} M(B)_\rho + \frac{1}{\rho^{n-1}} \left[1 + \frac{2 \operatorname{arctg} \pi}{\pi \rho^2} + \frac{1}{\pi} l \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \right) \right] M(A)_\rho, \rho = 1 - \frac{1}{n}. \quad (24)$$

Un calcul numérique de la quantité mise entre crochets montre qu'elle est inférieure à 1,84 pour $n \geqq 1000$; elle prend pour $\rho = 1$ la valeur $1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \pi + \frac{1}{\pi} l\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)$, qui est plus petite que 1,838. On a ainsi

$$a_n < \frac{2}{\rho^n} M(B)_\rho + \frac{1{,}84}{\rho^{n-1}} M(A)_\rho, \ \rho = 1 - \frac{1}{n}, \ n \geqq 1000. \quad (25)$$

En désignant par M_ρ le module maximum de $f(s)$, pour $|s| = \rho$, on a

$$M(B)_\rho < M_\rho \text{ et } M(A)_\rho = M_\rho,$$

et, en substituant dans l'inegalité (25):

$$a_n < \frac{3{,}84}{\rho^n} M_\rho, \ \rho = 1 - \frac{1}{n}. \qquad (26)$$

Suivant l'hypothèse, faite sur $f(s)$, d'après laquelle tous les coefficients du développement en série de Taylor sont positifs, $f(s)$ obtient son module maximum sur le cercle $|s| = \rho$ pour $s = \rho$; on peut alors écrire $M_\rho = f(\rho)$, et l'inégalité (26) peut s'énoncer sous la forme du théorème suivant.

La somme a_n des $n+1$ premiers coefficients de la série $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$, supposée convergente pour $|s| < 1$ et dont tous les coefficients sont réels et positifs, est inférieure au produit

$$\frac{c}{\rho^n} f(\rho),$$

où $\rho = 1 - \frac{1}{n}$ et c désigne une quantité finie, qui pour $n \geqq 1000$ est plus petite que 3,84.

Cette limite supérieure obtenue pour la somme α_n rappelle beaucoup celle de Cauchy pour un seul coefficient a_n.

§ 6. On peut se demander si l'hypothèse faite sur $f(s)$ que tous les coefficients du développement $f(s) = \sum a_n s^n$ sont positifs, — si cette hypothèse, disons-nous, est nécessaire pour obtenir le théorème exprimé dans l'inégalité (26). Nous n'allons pas approfondir ce problème dont la solution offrira sans doute des difficultés très grandes; remarquons seulement que l'hypothèse en question est faite pour nous permettre de tirer la conclusion suivante:

$$\left| \sum_{p=1}^{p=n} a_p \rho^p \right| < M_\rho,$$

Il va sans dire que cette inégalité peut avoir lieu dans des cas où les coefficients a_p ne sont pas tous positifs; pour le voir, on n'a qu'à considérer les cas où tous les coefficients sont réels et de signes alternés. Dans une note entitulée: Sur la somme des n premiers coefficients d'une série de Taylor (Comptes Rendus, t. 148, 1909) nous avons énoncé le théorème en question en toute généralité, ce qui probablement n'est pas exact.

Chapitre II.

Applications à la théorie des nombres.

§ 7. Exemple 1. Comme première application des résultats précédents nous allons chercher une limite supérieure pour la somme $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p}$. La fonction analytique que nous avons à considérer est

$$f(s) = l\,\frac{1}{1-s} = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \ldots.$$

En posant $s = \rho e^{i\theta}$ on a

$$A + iB = l\frac{1}{1-\rho\cos\theta - i\rho\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2}l\frac{1}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} + i\,\mathrm{arctg}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta},$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{1}{2}l\frac{1}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} \text{ et } B = \mathrm{arctg}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta},$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqq B \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

et, par suite,

$$M(A)_\rho = l\frac{1}{1-\rho}, \; M(B)_\rho < \frac{\pi}{2}.$$

Employons pour a_n la limite supérieure (23).

On a, pour $\rho = 1 - \frac{1}{kn}$,

$$M(A)_\rho = l\,kn$$

et

$$\frac{1}{\rho^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{kn-1}\right)^{n-1} = \left[\left(1+\frac{1}{kn-1}\right)^{kn-1}\right]^{\frac{n-1}{kn-1}} < e^{\frac{n-1}{kn-1}} < \sqrt[k]{e},$$

d'où il suit, en vertu de l'expression (23),

$$a_n < \frac{kn}{kn-1}\pi\sqrt[k]{e} + \sqrt[k]{e}\left[1 + \frac{2\,\mathrm{arctg}\,k\pi}{\pi k\rho^2} + \frac{1}{\pi}l\left(1+\frac{1}{k^2\pi^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{kn\rho\pi}l(1+k^2\pi^2) - \frac{3}{2k\rho n}\right]l\,kn, \tag{27}$$

où k désigne un nombre positif au moins égal à 1. Posons par exemple $k = 10^3$; l'inégalité (24) donne alors le résultat:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p} < 1{,}0021\,ln + 10{,}07, \; n > 10^4.$$

§ 9. Comme seconde application nous allons chercher une limite supérieure pour la somme

$$T(1) + T(2) + \ldots + T(n),$$

où $T(k)$ désigne le nombre des diviseurs du nombre entier positif k. Cette fonction est liée à la série de Lambert $L(s)$.

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1-s^n}, \quad |s| < 1.$$

On a en effet

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n) s^n.$$

Pour des valeurs réelles positives de s, on a l'expression[1]

$$L(s) = \frac{s}{1-s} + \frac{l(1-s^{\frac{3}{2}})}{ls} + 2\int_0^{\infty} \frac{s^{\frac{3}{2}} \sin yls}{1-2s^{\frac{3}{2}}\cos yls + s^3} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}. \quad (28)$$

Cette fois nous faisons usage de la limite supérieure (26)

$$a_n < \frac{3{,}84}{\rho^n} M_\rho, \quad \rho = 1 - \frac{1}{n}.$$

Pour évaluer M_ρ on pose $s = 1 - \frac{1}{n}$ dans l'équation (28). Au second membre de cette équation se trouvent trois termes dont le premier prend pour $s = 1 - \frac{1}{n}$ la valeur $n-1$ et le troisième pour $n = \infty$ croît à l'infini comme la fonction $\frac{1}{ls}$[1], c'est-à-dire comme n. Le second terme croît à l'infini pour $n = \infty$ comme nln, car

$$\frac{l(1-s^{\frac{3}{2}})}{ls} = \frac{l\left[1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}{l\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{l\frac{3}{2n}}{l\left(1-\frac{1}{n}\right)} = c \cdot nln,$$

en posant

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2n}, \quad l\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Pour $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, on a

$$\frac{1}{\rho^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n-1},$$

[1] Voir le mémoire de l'auteur: Recherches sur les singularités de certaines séries spéciales sur leur cercle de convergence. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 7me série, section des sciences t. VI no 1.

c'est-à-dire que, pour $n = \infty$, la limite de $\frac{1}{\rho^n}$ est égale à e. L'inégalité (26) montre alors que pour les grandes valeurs de n la valeur de la somme

$$T(1) + T(2) + \cdots + T(n)$$

est moindre que $3{,}84 \cdot e \cdot nln$.

§ 10. Comme dernière application nous considérons la fonction

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}, \quad |s| < 1, \tag{29a}$$

qui admet le développement[1]

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{T_3(n) - T_1(n)\} s^n, \tag{29b}$$

où $T_3(n)$ et $T_1(n)$ indiquent combien il y a de diviseurs des formes $4p-3$ et $4p-1$ dans le nombre n (p est un nombre entier positif). Tous les coefficients de la série (29) sont positifs, ce que montre par exemple l'identité due à Jacobi

$$1 + 4\Phi(s) = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2}\right)^2;$$

nous pouvons donc employer la limite supérieure (26).

Lorsque s est réelle et positive on a l'expression[2]

$$\Phi(s) = -\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{s}}{ls} + 2\int_0^{\infty} \frac{(1-s)\sqrt{s}\sin yls}{1+2s\cos 2yls + s^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1} \cdot \tag{30}$$

L'intégrale du second membre tend vers zéro, quand s tend vers l'unité; on a en effet

$$\left|\int_0^{\infty} \frac{(1-s)\sqrt{s}\sin yls}{1+2s\cos 2yls+s^2} \cdot \frac{dy}{e^{2\pi y}+1}\right| < \left(\frac{l2}{2\pi} + 2\right)\delta, \tag{31}$$

[1] Voir le mémoire de l'auteur: Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de Lambert et des séries analogues. Bulletin de l'Académie Royale de Danemark, 1907.

[2] Voir le mémoire de l'auteur cité § 9.

où δ est une quantité positive quelconque aussi petite qu'on voudra, telle que $|ls| < \delta^2$, $|ls| < 2(1-s)$. Posons alors $s = 1 - \frac{1}{n}$ dans l'équation (30) et (31); on a

$$\Phi\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{\frac{\pi}{4}}{\left|l\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|} + \left(\frac{l2}{2\pi}+2\right)\frac{2}{\sqrt{n-1}}, \tag{32}$$

ayant posé $\delta = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, ce qu'on doit faire, car

$$\left|l(s)\right| = \left|l\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$
$$< \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{n-1},$$

Il suit alors de l'inégalité (32) qu'on a

$$\Phi\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{4}n + \frac{4{,}24}{\sqrt{n-1}},$$

et, par suite, en vertu de l'expression (26),

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(T_3(k) - T_1(k)\right) < \frac{3{,}84}{\rho^n}\Phi\left(1-\frac{1}{n}\right) < 7n + \frac{38}{\sqrt{n-1}}.$$

Considérons la différence $T_3(n) - T_1(n)$ dans le cas où n est un entier impair. On démontre dans la théorie des nombres que le nombre des décompositions différentes d'un entier impair en deux carrés est égale à

$$\frac{1}{2}\left[T_3(n) - T_1(n) + 1\right] \text{ ou à } \frac{1}{2}\left[T_3(n) - T_1(n)\right]$$

suivant que n est un carré ou non.

L'équation (29b) montre qu'on a

$$\Psi(s) = \Phi(s) - \Phi(-s) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{T_3(2n-1) - T_1(2n-1)\right\}s^{2n-1}.$$

Pour $2n-1$ congru à -1 (mod. 4) tous les coefficients de cette série sont égaux à zéro. Nous allons chercher une limite supérieure pour la somme

$$a_n = \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n+1)} \left[T_3(2k-1) - T_1(2k-1) \right], \quad n \text{ impair.}$$

Il suit de l'équation (29 a) que

$$\Phi(-s) = 2\Phi(s^2) - \Phi(s)$$

et par conséquent

$$\Psi(s) = 2\Phi(s) - 2\Phi(s^2)$$

$$= -\frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{s}}{ls} + \frac{\operatorname{arctg} s}{ls} + 2K_1 - 2K_2, \tag{33}$$

où K_1 est l'intégrale au second membre de l'équation (30) et K_2 peut se former de celle-ci en remplaçant s par s^2. Les intégrales K_1 et K_2 convergent vers zéro pour $s = 1$ comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n = \infty$. On a en outre

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{s} - \operatorname{arctg} s = \operatorname{arctg} \sqrt{s} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s} - s}{1 + s\sqrt{s}}.$$

En y posant $s = 1 - \frac{1}{n}$ on voit que la différence du premier membre est inférieure à $\frac{\pi}{4}$ et tend vers $\frac{\pi}{4}$ pour $n = \infty$. Il suit alors de l'équation (33) qu'on a

$$\Psi\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{4}\, n + \frac{c}{\sqrt{n-1}},$$

où c est une quantité finie. En vertu de l'inégalité (26) on aura ainsi la limite supérieure

$$a_n < \frac{1}{2} \cdot \frac{3{,}84}{\rho^n}\, \Psi\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 4{,}1\, n + \frac{c_1}{\sqrt{n-1}}.$$

Nous terminons en faisant la remarque, relativement aux applications, que nous avons faitedu théorème du § 6: que les limites supérieures obtenues à l'aide de ce théorème ne sont pas les valeurs moyennes des fonctions numériques en question; les valeurs moyennes sont plus petites comme on le démontre dans la théorie des nombres. Mais les limites supérieures que nous avons obtenues sont par rapport à n du vrai ordre de grandeur en ce sens que leurs rapports aux valeurs moyennes sont finis. Pour établir des limites supérieures, qui soient inférieures à celles, que nous avons obtenues, il faudrait faire une étude plus précise des intégrales que nous avons considerées et peut-être choisir la quantité ρ d'une manière plus convenable. Nous n'insisterons pas sur ce point; nous avons seulement voulu montrer qu'en employant notre théorème on arrive aux résultats qui par rapport à n sont du vrai ordre de grandeur.